Решение задач - кинематика

1. Кинематика

1. Катер, двигаясь с постоянной по модулю скоростью, прошел по озеру в направлении на северо-восток 3 км, а затем еще 4 км на север. Определите модуль и направление вектора перемещения. Вычислите отношение средней путевой скорости и модуля скорости перемещения катера.

Дано: $|\vec{S}_1| = 3$ км, $\varphi_1 = 45°$, $|\vec{S}_2| = 4$ км, $\varphi_2 = 0°$.

Найти: $|\vec{S}_o|$, φ_0, $\dfrac{V_{cp}}{|\vec{V}_o|}$.

Решение.

По определению средняя путевая скорость равна: $V_{cp} = \dfrac{S_o}{t_o} = \dfrac{S_1 + S_2}{t_o}$, где S_1 и S_2 — длины пути на первом и втором участках движения катера (рис. 1). Модуль вектора перемещения $\vec{S}_o$ из точки О в точку В равен:

$$|\vec{S}_o| = \sqrt{S^2_{ox} + S^2_{oy}}, \quad (1)$$

где S_{ox} и S_{oy} - проекции вектора перемещения на оси ОХ и OY соответственно. Поскольку

$$S_{ox} = S_{1x} + S_{2x} = S_1 \sin\varphi_1 + S_2 \sin\varphi_2,$$

$$S_{oy} = S_{1y} + S_{2y} = S_1 \cos\varphi_1 + S_2 \cos\varphi_2,$$

следовательно,

$$|\vec{S}_o| = \sqrt{(S_1 \sin\varphi_1 + S_2 \sin\varphi_2)^2 + (S_1 \cos\varphi_1 + S_2 \cos\varphi_2)^2} \quad (2)$$

Подставив значения величин, получим: $|\vec{S}_o| = 6{,}5$ км. Чтобы определить направление вектора перемещения катера, необходимо найти угол φ_0. Для этого вычислим какую-нибудь тригонометрическую функцию этого угла, например: $\sin\varphi_o = \dfrac{S_{ox}}{|\vec{S}_o|} = \dfrac{S_1 \sin\varphi_1}{|\vec{S}_o|} \approx 0{,}3264$. Значит, $\varphi_0 = 19°$.

Определим отношение средней скорости и скорости перемещения катера:

$$|\vec{V}_o| = \frac{|\vec{S}_o|}{t_o}, \text{ тогда } \frac{V_{cp}}{|\vec{V}_o|} = 1{,}1.$$

Ответ: $|\vec{S}_o| = 6{,}5$ км, $\varphi_0 = 19°$, $\dfrac{V_{cp}}{|\vec{V}_o|} = 1{,}1$.

2. Движение двух велосипедистов заданы уравнениями: $X_1 = -100 + 5t$, $X_2 = 150 - 7{,}5t$. Определите время и место встречи велосипедистов. Какое расстояние будет между ними через $\Delta t_1 = 30$ с? Через какое время расстояние между велосипедистами станет равным $\Delta X_2 = 300$ м?

Дано: $X_1 = -100 + 5t$, $X_2 = 150 - 7{,}5$, $\Delta t_1 = 30$ с, $\Delta X_2 = 300$ м.
Найти: X_0, t_0, ΔX_1, Δt_2.

Решение.

Из уравнений движения видно, что первый велосипедист находится слева на расстоянии $X_{10} = 100$ м от начала координат и движется вдоль оси OX со скоростью $V_1 = 5$ м/с. Второй находится справа от начала координат на расстоянии $X_{20} = 150$ м и движется против оси OX со скоростью $V_2 = 7{,}5$ м/с (рис. 2).

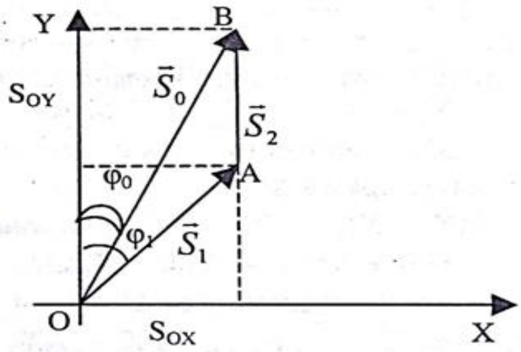

Рис. 1

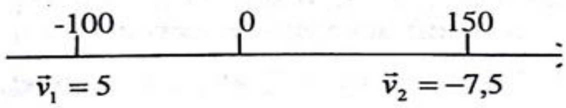

Рис. 2

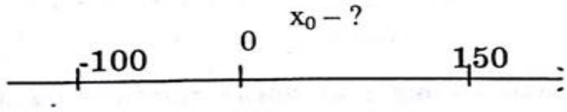

Рис. 3

В момент встречи велосипедисты будут иметь одну и ту же координату, т.е. $X_1^{|} = X_2^{|} = X_0$ (рис.3). Следовательно, одновременно будут выполняться следующие равенства:

$$X_1^{|} = X_2^{|} = X_0, \qquad (1)$$

$$X_1^{|} = -100 + 5t_0, \qquad (2)$$

$$X_2^{|} = 150 - 7{,}5t_0. \qquad (3)$$

Решая эту систему уравнений, находим время и место встречи велосипедистов: $t_0 = 20$ с, $X_0 = 0$ м.

Чтобы найти расстояние между велосипедистами через время $\Delta t_1 = 30$ с, найдем их координаты в этот момент времени:

$X_{11} = X_{10} + V_1\,\Delta t_1 = -100 + 5\,\Delta t_1 = -100 + 5\cdot 30 = 50$(м),
$X_{21} = X_{20} + V_2\,\Delta t_1 = 150 - 7{,}5\,\Delta t_1 = 150 - 7{,}5\cdot 30 = -75$(м).

Тогда расстояние между велосипедистами через $\Delta t_1 = 30$ с от начала движения равно разности их координат в этот момент времени, т.е.

$\Delta X_1 = X_{11} - X_{21} = 125$ **м.**

Зная расстояние между велосипедистами $\Delta X_2 = 300$ м, найдем время Δt_2:

$\Delta X = X_{12} - X_{22} = 300$ **м,** значит,

$-100 + 5\Delta t_2 - 150 + 7{,}5\Delta t_2 = 300$,

откуда следует, что $\Delta t_2 = 44$ с.

Ответ: $X_0 = 0$ м, $t_0 = 20$ **с,** $\Delta X_1 = 125$ м, $\Delta t_2 = 44$ с.

3. Эскалатор метро поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира за 1,5 мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за 3 мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

Дано: $t_1 = 1{,}5$ **мин.,** $t_2 = 3$ мин., $L = const$,
$V_3 = V_1 + V_2$.
Найти: t_3.

Решение.

При одновременном движении пассажира и эскалатора время подъема будет определяться уравнением:

$$t_3 = \frac{L}{V_3},$$

где L — расстояние между нижней и верхней точками подъема по линии перемещения, V_3 — результирующая скорость пассажира в системе отсчета, связанной с Землей:

$$\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2,$$

где $\bar{V}_1$ — скорость пассажира относительно эскалатора; $\bar{V}_2$ —скорость движения эскалатора относительно Земли. Направим ось ОХ по линии движения эскалатора, тогда $V_3 = V_1 + V_2$. Значит,

$$t_3 = \frac{L}{V_1 + V_2} \quad (1)$$

Зная время подъема пассажира по неподвижному эскалатору и время подъема неподвижного пассажира эскалатором, из уравнения движения выразим модули скоростей V_1 и V_2:

$$V_1 = \frac{L}{t_1} \quad (2)$$

$$V_2 = \frac{L}{t_2} \quad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим:

$$t_3 = \frac{L}{L/t_1 + L/t_2} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = 1 \text{ мин.}$$

Ответ: $t_3 = 1$ мин.

4. Колонну бегущих с одинаковой скоростью спортсменов встречает тренер, который бежит навстречу со скоростью вдвое меньшей. Длина колонны $l = 90$ м. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и бежит обратно с прежней по модулю скоростью. Определите длину развернувшейся колонны L в тот момент, когда последний спортсмен поравнялся с тренером.

Дано: $l = 90$ м, $V_{ТР} = 0{,}5\, V_{СП}$.

Найти: L.

Решение.

Выберем подвижную систему отсчета, связанную с тренером. За положительное направление оси OX примем направление движения тренера. Очевидно, что длина развернувшейся колонны будет равна расстоянию между первым и последним спортсменом в момент разворота последнего, т.е. равна пути, который пробежит первый спортсмен с момента своего разворота за время, за которое последний спортсмен добежит до тренера:

$$L = V_{1-ТР} \cdot \Delta t,$$

где $V_{1-ТР}$ — скорость первого спортсмена в подвижной системе отсчета, Δt — время, прошедшее с момента разворота первого спортсмена до момента разворота последнего.

Очевидно, что $\Delta t = \dfrac{l}{V_{2-ТР}}$, где l —первоначальная длина колонны, $V_{2-ТР}$ — скорость последнего спортсмена в подвижной системе отсчета до разворота.

Учитывая направления векторов скоростей относительно оси OX, получим:

$$V_{1-ТР} = V_{СП} - V_{ТР}, \; V_{2-ТР} = V_{СП} + V_{ТР}.$$

Следовательно, длина развернувшейся колонны

$$L = (V_{СП} - V_{ТР}) \frac{l}{V_{СП} + V_{ТР}} = \frac{l}{3} = 30 \text{ м}.$$

Ответ: $L = 30$ м.

5. Автомобиль проехал половину пути со скоростью $V_1 = 60$ км/ч, затем половину оставшегося пути — со скоростью $V_2 = 70$ км/ч. Найдите скорость движения автомобиля на третьем участке V_3, если известно, что средняя скорость движения автомобиля на всем пути оказалась равной $V_{CP} = 66{,}5$ км/ч.

Дано: $V_1 = 60$ км/ч, $V_2 = 70$ км/ч, $V_{CP} = 66{,}5$ км/ч, $S_1 = S/2$, $S_2 = S/4$, $S_3 = S/4$.
Найти: V_3.

Решение.

По определению,

$$V_{CP} = \frac{S}{t}$$

где S — длина всего пути, t — общее время движения.

Так как $t = t_1 + t_2 + t_3$, где t_1, t_2, t_3 — время движения автомобиля на первом, втором и третьем участках пути соответственно, то

$$V_{CP} = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3} \qquad (1)$$

Очевидно, что время движения на каждом участке равно:

$$t_1 = S_1/V_1 = \frac{S}{2V_1} \qquad (2)$$

$$t_2 = S_2/V_2 = \frac{S}{4V_2} \qquad (3)$$

$$t_3 = S_3/V_3 = \frac{S}{4V_3} \qquad (4)$$

Подставив уравнения (2) – (4) в уравнение (1), получим

$$V_{CP} = \frac{4V_1V_2V_3}{2V_2V_3 + V_1V_2 + V_1V_3} \; (5)$$

Преобразовав равенство (5), найдем скорость движения автомобиля на третьем участке:

$$V_3 = \frac{V_{CP}V_1V_2}{4V_1V_2 - V_{CP}(2V_2 + V_1)} = 79{,}8 \text{ км/ч.}$$

Ответ: $V_3 = 79{,}8$ км/ч.

6. Самолет, летевший прямолинейно со скоростью $V_1 = 720$ км/ч, начинает двигаться равноускоренно и за пятую секунду пролетает $\Delta S_5 = 380$ м. Определите ускорение самолета a, его скорость в конце пятой секунды V_5 и перемещение S_5 за время ускорения.

Дано: $V_1 = 200$ м/с, $\Delta S_5 = 380$ м, $t = 5$ с, $a = const$.
Найти: a, V_5, S_5.

Решение.

Расстояние, которое самолет пролетает за пятую секунду, равно разности путей самолета за 5 и 4 с соответственно: $\Delta S_5 = S_5 - S_4$. Поскольку

$$S_5 = V_1 t + at^2/2;$$

$$S_4 = V_1 (t - 1) + a(t - 1)^2/2,$$

$$\Delta S_5 = V_1 + at - a/2$$

Следовательно

$$a = 2(\Delta S_5 - V_1)/(2t - 1) = 40 \text{ м/с}^2.$$

Зная ускорение, определим скорость самолета в конце пятой секунды:

$$V_5 = V_1 + at = 400 \text{ м/с} = 1440 \text{ км/ч}.$$

Найдем перемещение самолета за 5 с: т.к.

$$2aS_5 = V_5^2 - V_1^2,$$

значит, $S_5 = \dfrac{V_5^2 - V_1^2}{2a} = 1500$ м $= 1,5$ км.

Ответ: $a = 40$ м/с^2, $V_5 = 1440$ км/ч, $S_5 = 1,5$ км.

7. За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью $V_1 = 10$ м/с, движется собака с постоянной по модулю скоростью, равной $V_2 = 15$ м/с. Вектор скорости собаки все время направлен на лису. В некоторый момент времени направление вектора скорости собаки перпендикулярно направлению вектора скорости лисы, а расстояние между ними в этот момент равно $l = 50$ м. Определите ускорение собаки a_{21} в этот момент времени.

Дано: $V_1 = 10$ м/с, $V_2 = 15$ м/с, $\vec{V}_{11} \perp \vec{V}_{21}$, $l = 50$ м.
Найти: a_{21}.

Решение.

Так как вектор скорости собаки все время направлен на лису, а величина скорости остается постоянной, значит, собака бежит по криволинейной траектории с центростремительным ускорением

$$a_2 = \frac{V_2^2}{R} \qquad (1)$$

где R — радиус кривизны траектории собаки в момент времени t, V_2 – модуль скорости собаки.

Пусть в момент времени t лиса находилась в точке А, а собака — в точке В и в это время $\vec{V}_{11} \perp \vec{V}_{21}$, $AB = l = 50$ м (рис. 4). Через время $\Delta t \to 0$ лиса переместится из точки А в точку A_1.

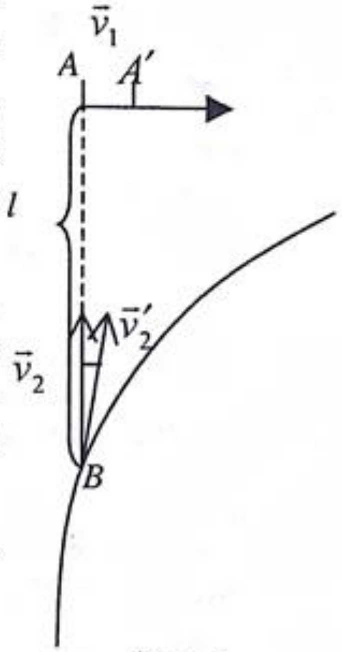

Рис. 4

Очевидно, что $AA_1 = \Delta S_1 = V_1 \Delta t$. Собака за это время повернется на угол $a = \omega \Delta t$, где ω — угловая скорость собаки в момент времени t. Так как $\Delta t \to 0$, то $\Delta S_1 \approx al = l\omega\Delta t$, или $V_1 \Delta t = l\omega\Delta t$. Значит, $V_1 = l\omega$. С учетом того, что $V_2 = \omega R$, получим, что

$V_1 = \dfrac{lV_2}{R}$, откуда следует:

$$R = \frac{lV_2}{V_1} \quad (2)$$

С учетом равенств (1) и (2), получим ускорение

$$a_{21} = \frac{V_1 V_2}{l} = 3 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_{21} = 3$ м/с^2.

8. Груз, привязанный к веревке длиной 50 см, вращают в вертикальной плоскости с частотой 5 $с^{-1}$. На какую высоту поднялся бы груз, если бы веревка оборвалась в тот момент, когда линейная скорость груза направлена вертикально вверх?

Дано: $R = 0{,}5$ м, $\nu = 5\ с^{-1}$, $g = 10$ м/$с^2$, $\vec{V}_N \uparrow ? \vec{g}$.

Найти: H_{MAX}.

Решение.

Максимальная высота подъема груза H_{MAX} связана с его начальной скоростью V_N, направленной вертикально вверх (рис. 5), следующей формулой:

$$2g H_{MAX} = V_N^2,$$

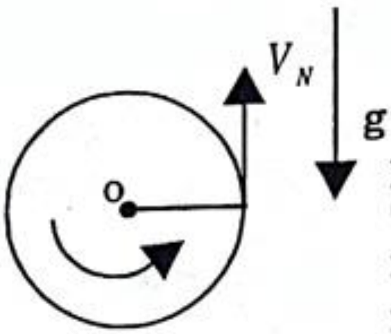

Рис. 5

так как $V_K = 0$. Модуль линейной скорости груза зависит от радиуса и частоты вращения, т.е. определяется соотношением: $V_N = 2\pi\nu R$, где ν — частота вращения, R — радиус вращения груза.

Следовательно,

$$H_{MAX} = \frac{V_N^{\ 2}}{2g} = \frac{(2\pi\nu R)^2}{2g} = 12{,}25\ м.$$

Ответ: $H_{MAX} = 12{,}25$ м.

9. Небольшое массивное тело, брошенное под углом 30° к горизонту, на высоте H было дважды: через 1 и 3 с после броска. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите значение этой высоты, начальную скорость и максимальную высоту подъема тела.

Дано: $H_1 = H_2 = H$, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3$ с, $g = 10$ м/с^2, $a = 30°$.
Найти: H, H_{MAX}, V_H

Решение.

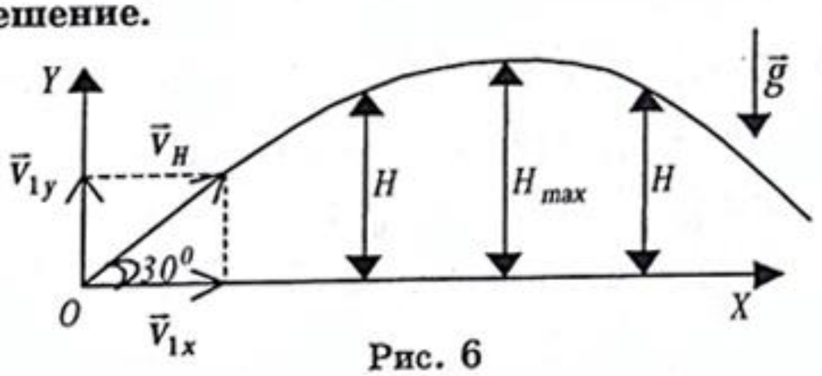

Рис. 6

Тело, брошенное под углом к горизонту, одновременно участвует в двух движениях: по инерции с постоянной скоростью $V_{1\text{-}H}$ движется вдоль оси OX, направленной горизонтально, и с ускорением $g = 10$ м/с^2 — вдоль оси OY, направленной вертикально вверх (рис. 6). Соответственно, составляющие начальной скорости тела будут равны:

$$V_{H\text{-}Y} = V_H sin30^c,\ V_{H\text{-}X} = V_H\, cos30^c,$$

где V_H — модуль начальной скорости тела.

Запишем уравнения движения тела вдоль оси OY:

$H_1 = V_{H\text{-}Y}t_1 - gt_1^2/2$ (1),

$H_2 = V_{H\text{-}Y}t_2 - gt_2^2/2$ (2),

$H_1 = H_2 = H$ (3).

Решение этой системы уравнений дает следующий результат:

$H_1 = H_2 = H = 15$ м, $V_{H\text{-}Y} = 20$ м/с.

Используя соотношение $2gH_{MAX} = V^2_{H\text{-}Y}$ (т.к. $V_{K-Y} = 0$), получим: $H_{MAX} = 20$ м. Поскольку $V_{H\text{-}Y} = V_{H\text{-}Y}$ sin30°, значит, $V_H = V_{H\text{-}Y}/\sin30° = 40$ м/с.
Ответ: $H = 15$ м, $H_{MAX} = 20$ м, $V_1 = 40$ м/с.

10. Из двустороннего баллистического пистолета, установленного на высоте $H = 20$ м над поверхностью Земли, произвели выстрел в горизонтальном направлении. Начальные скорости снарядов соответственно равны $V_1 = 5$ м/с и $V_2 = 20$ м/с. Через какое время векторы скоростей снарядов будут перпендикулярны друг другу? Определите угол между векторами скоростей снарядов в момент их падения на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: H = 20 м, $g = 10$ м/с^2, $V_1 = 5$ м/с, $V_2 = 20$ м/с, $\varphi_1 = 90°$.

Найти: t_1, α_K.

Решение.

После вылета из ствола оба снаряда под действием силы тяжести станут падать вертикально вниз с ускорением $g = 10$ м/с^2, продолжая по инерции двигаться в горизонтальном направлении. В какой-то момент времени векторы их результирующих скоростей образуют прямой угол (рис. 7), т.е. $\bar{V}_{11} \perp \bar{V}_{21}$. Модули этих скоростей соответственно будут равны:

$$V_{11} = \sqrt{V_{X1}^2 + (gt_1)^2},\ V_{21} = \sqrt{V_{X2}^2 + (gt_1)^2},$$

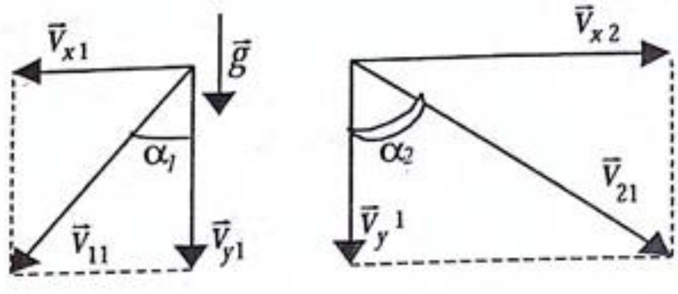

Рис. 7

т.к. $V_{Y1} = V_{Y2} = gt_1$ и $\bar{V} = \bar{V}_X + \bar{V}_Y$.

По условию, $\bar{V}_{11} \perp \bar{V}_{21}$, значит,

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (1)$$

Т. к.

$$\sin\alpha_1 = \frac{V_{X1}}{V_{11}} = \frac{V_{X1}}{\sqrt{V_{X1}^2 + (gt_1)^2}}.$$

$sin\alpha_1 = sin\,(90 - \alpha_2) = cos\alpha_2$, то с учетом уравнения (1), получим:

$$cos\alpha_2 = \frac{gt_1}{\sqrt{V_{X2}^2 + (gt_1)^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{X1}}{\sqrt{V_{X1}^2 + (gt_1)^2}} = \frac{gt_1}{\sqrt{V_{X2}^2 + (gt_1)^2}} \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что $g^4 t_1^4 = 10000$, значит, $t_1 = 1c$.

Зная первоначальную высоту, найдем вертикальную составляющую конечной скорости обоих снарядов: $2gH = V_{Y-K}^2, \Rightarrow V_{Y-K} = \sqrt{2gH}$ (вертикальная составляющая начальной скорости снарядов равна нулю). Так как проекция скорости каждого снаряда на ось ОХ остается постоянной, а $\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y$, следовательно,
$V_{K-1} = \sqrt{V_{X1}^2 + V_{Y-K}^2}$, $V_{K-2} = \sqrt{V_{X2}^2 + V_{Y-K}^2}$.
Так как

$$sin\,\alpha_{K-1} = V_{X1}/V_{K-1} = \frac{V_{X1}}{\sqrt{V_{X1}^2 + 2gH}},$$

$$sin\,\alpha_{K-2} = \frac{V_{X2}}{V_{K-2}} = \frac{V_{X2}}{\sqrt{V_{X2}^2 + 2gH}},$$

то

$$\alpha_{K-1} = arcsin\frac{V_{X1}}{\sqrt{V_{X1}^2 + 2gH}},\ \alpha_{K-2} = arcsin\frac{V_{X2}}{\sqrt{V_{X2}^2 + 2gH}}.$$

Следовательно, $\alpha_K = \alpha_{K-1} + \alpha_{K-2} \approx 59°$.

Ответ: $t_1 = 1$ с, $\alpha_K = 59°$.